

# KATEDRA FYZIKY VŠB-TU OSTRAVA

Student	NÁZEV PRÁCE  <b>Rezonanční RLC obvod</b>	Číslo práce
Skupina/Osob. číslo		Datum
Spolupracoval		Podpis studenta:

## Cíle měření

Seznámit se s rezonancí v obvodu se střídavým proudem. Sestavit rezonanční křivky pro sériový RLC obvod. Naučit se pracovat s osciloskopem a s funkčním generátorem.

## Měřicí prostředky

digitální osciloskop Tektronix, kapacitní dekáda (Mictronix), indukční dekáda (Mictronix), odporová dekáda, stolní multimetr Hameg, spojovací vodiče, dvě redukce BNC banánek, funkční generátor Hameg

## Kompendium teorie

Indukčnost  $L$  a kapacita  $C$  jsou vlastnosti prvků elektrického obvodu, které závisí na geometrii vodičů a izolantů, ze kterých se skládají. Můžeme je vyjádřit pomocí fundamentálních fyzikálních veličin, jimiž jsou elektrický náboj, napětí a čas těmito vztahy:

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (1)$$

$$U_L = L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (2)$$

Pro úplnost uvedme Ohmův zákon, který budeme používat u rezistoru:

$$U_R = \frac{I}{R} \quad (3)$$

V obvodech se střídavým proudem budeme pracovat s těmito základními prvky:

- rezistor odporu  $R$
- cívku indukčnosti  $L$
- kondenzátor kapacity  $C$ .

Cívka je vyrobena navinutím vodiče do tvaru cívky. Samotný vodič má elektrický odpor, proto je cívka charakterizovaná nejenom indukčností, ale i elektrickým odporem, který je však v porovnání s elektrickým odporem rezistoru použitého v našem měření, zanedbatelný.

### **Kapacitní a induktivní reaktance**

Střídavý proud může procházet cívkou, ale i kondenzátorem. Mírou efektu, který mají tyto prvky obvodu na střídavý proud, je **reaktance** ( $X$ ). Je limitována velikost proudu, který těmito prvky prochází, ale je také ovlivněn fázový posuv mezi proudem a napětím na jednotlivých prvcích obvodu. **Impedance** ( $Z$ ) je zdánlivý odpor obvodu, který obsahuje prvky s elektrickým odporem a reaktancí.

Porovnejme fázový posuv mezi napětím a proudem u rezistoru, cívky a kondenzátoru:

- rezistor: Napětí na rezistoru je v každém okamžiku přímo úměrné proudu, který rezistorem prochází. Napětí a proud jsou ve fázi.
- kondenzátor: Fázový posuv mezi napětím a proudem je  $\pi/2$  rad (na časové ose čtvrtina periody). Elektrický proud závisí na frekvenci napětí na kondenzátoru. Proud „předbíhá napětí“ o  $\pi/2$  rad. Dosáhne-li v určitém okamžiku proud maximální hodnoty, napětí bude mít maximální hodnotu za čtvrtinu periody.
- cívka: Fázový posuv mezi napětím a proudem je  $\pi/2$  rad (na časové ose čtvrtina periody). Napětí „předbíhá proud“ o  $\pi/2$  rad. Dosáhne-li v určitém okamžiku napětí maximální hodnoty, proud bude mít maximální hodnotu za čtvrtinu periody.

Velikosti reaktancí jsou dány vztahy:

a) kapacitní reaktance (kapacitance)

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} \quad (4)$$

b) induktivní reaktance (induktance)

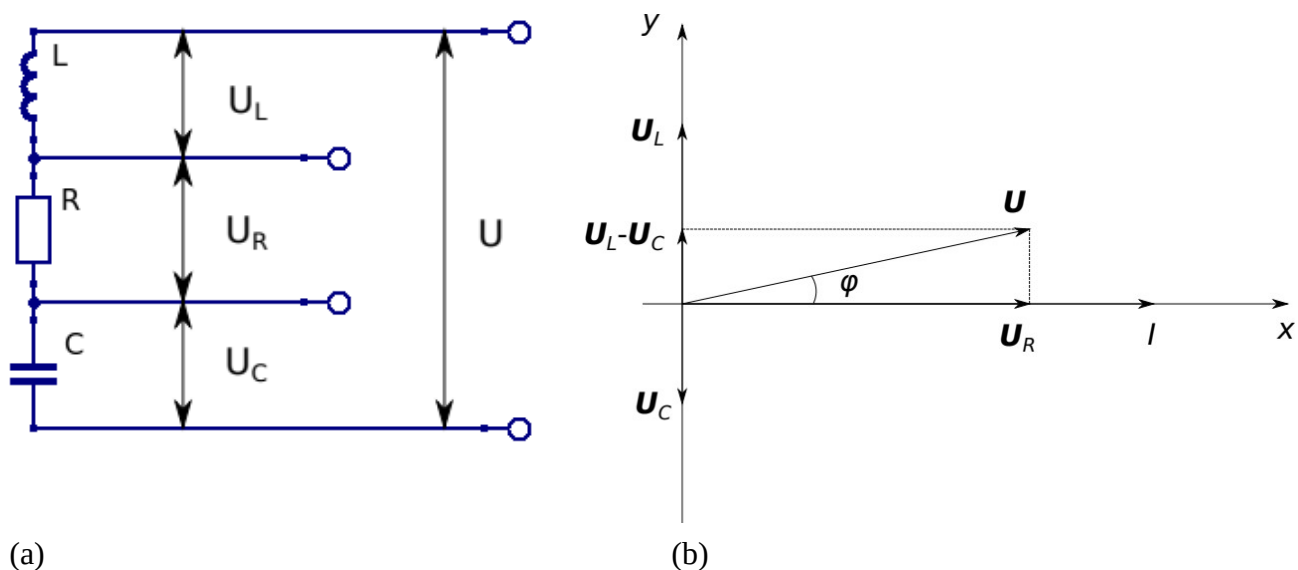
$$X_L = \omega L = 2\pi fL. \quad (5)$$

Jednotka reaktance je Ohm ( $\Omega$ ). Ze vztahů [4] a [5] vyplývá, že pro nulovou frekvenci je kapacitní reaktance nekonečná, zatímco induktivní reaktance je rovna nule.

### **Fázorový diagram**

Je názorné zobrazit aktuální hodnotu napětí a proudu daného prvku obvodu se střídavým proudem fázorovým diagramem. Mějme sériový RLC obvod (Obr. 1a). Fázor napětí na rezistoru  $U_R$  je orientován jako osa  $x$ , fázor napětí na cívce  $U_L$  jako osa  $y$  a fázor napětí na kondenzátoru  $U_C$  má opačnou orientaci než osa  $y$  (Obr. 1b). Jestliže si představíte, že fázorový diagram rotuje v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček) kolem počátku s frekvencí, která je rovna frekvenci střídavého proudu, pak  $y$ -ová souřadnice koncových bodů fázorů odpovídá hodnotám veličin, které tyto fázory reprezentují. Závislost těchto veličin na čase je popsána harmonickými funkcemi, jejichž typický tvar můžete pozorovat na obrazovce osciloskopu. Rovněž je patrný význam „předbíhání“ a „zpoždování“ veličin.

Napětí  $U$  je celkové napětí, jehož amplituda je rovna velikosti jeho fázoru  $U$ , který je vektorovým součtem fázorů  $U_L$ ,  $U_R$  a  $U_C$ . Fázorový diagram na Obr. 1 je zobrazen v okamžiku, ve kterém má napětí na rezistoru nulovou fázi. Střídavý proud je v daném okamžiku na všech prvcích sériového RLC obvodu stejný, tedy i fázor proudu. Proud je také ve fázi s napětím na rezistoru, proto jeho fázor má stejný směr a orientaci jako fázor napětí na rezistoru.



Obr. 1. a) Schéma sériového RLC obvodu, napětí na jeho prvcích a celkové napětí  $U$ . b) Fázorový diagram sériového RLC obvodu.

Vztahy, které budeme studovat, lze odvodit z diferenciálních rovnic, jež jsou pro daný obvod formulací Kirchhoffových zákonů. Názorněji se k nim můžeme dostat pomocí fázorového diagramu. Například celkové napětí dostaneme z Pythagorovy věty (Obr. 1b):

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (6)$$

Pro napětí v RLC obvodu platí:

$$U_R = IR, \quad (7)$$

$$U_C = IX_C, \quad (8)$$

$$U_L = IX_L, \quad (9)$$

$$U = IZ. \quad (10)$$

Po dosažení vztahů [7-10] do vztahu pro celkové napětí [6] dostaneme:

$$IZ = \sqrt{I^2 R^2 + (IX_L - IX_C)^2}. \quad (11)$$

Vydělíme proudem a získáme celkovou impedanci:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (12)$$

### **Fázový posuv**

Z fázorového diagramu (obr. 1b) také dostaneme fázový posuv mezi celkovým napětím (napětí dodávané do obvodu funkčním generátorem) a jakýmkoliv dalším napětím v obvodu. Fázový posuv mezi  $U$  a  $U_R$  získáme ze vztahu:

$$\tan \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (13)$$

Obr. 2 znázorňuje sériový RC obvod a jeho fázorový diagram. Snadno odvodíme, že platí:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (-U_C)^2} = I \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}, \quad (14)$$

$$\tan \varphi_C = \frac{U_R}{U_C} = \frac{IR}{IX_C} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C}} = R \omega C, \quad (15)$$

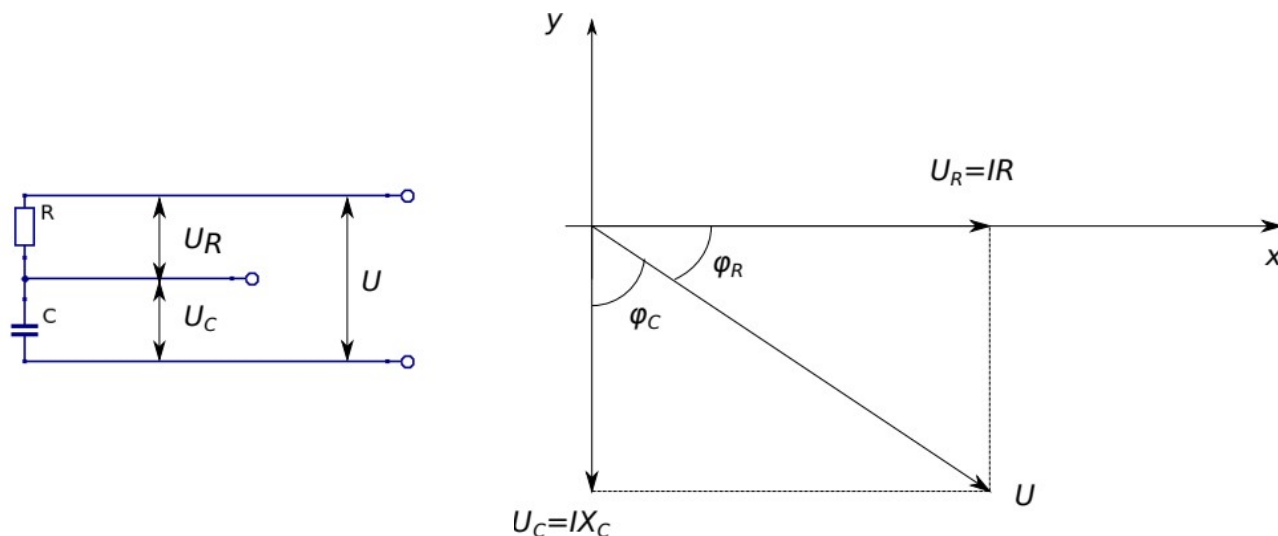
$$\tan \varphi_R = \frac{U_C}{U_R} = \frac{IX_C}{IR} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{1}{RC \omega}. \quad (16)$$

### **Frekvenční odezva rezonančního RLC obvodu**

Diskutujme závislost napětí na rezistoru na frekvenci pro sériový RLC obvod (obr. 1). Podle rovnice [7] je  $U_R = IR$ . Proto potřebuje k vyjádření tohoto napětí amplitudu proudu, který obvodem prochází. Vyjádříme ji ze vztahů [10] a [12]:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (17)$$

Induktanci  $X_L$  a kapacitanci  $X_C$  vyjádříme pomocí úhlové frekvence (viz [4] a [5]) a nakonec dostaneme:



Obr. 2 Schéma sériového RC obvodu a jeho fázorový diagram.

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (18)$$

$U$  je amplituda celkového napětí, které je do obvodu dodáváno ze zdroje. Je-li obvod v rezonanci, dosahuje amplituda proudu při daných parametrech prvků obvodu ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) maximální možnou hodnotu, tzn. celkové napětí a také proud  $I$  mají rezonanční úhlovou frekvenci  $\omega_r$  respektive frekvenci  $f_r$ , pro kterou platí:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0. \quad (19)$$

a tedy

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (20)$$

respektive

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (21)$$

Jestli by byl obvod v rezonanci a současně ohmický odpor  $R$  by byl nulový, amplituda proudu by byla nekonečná. Vyjádříme podíl napětí na rezistoru a celkového napětí pomocí vztahů [7] a [18]:

$$\frac{U_R}{U} = \frac{IR}{I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{R^2}}}. \quad (22)$$

### **Kapacitance a indukance jako funkce napětí**

Kapacitanci a indukanci můžeme vyjádřit pomocí naměřených napětí. Protože jsou všechny prvky v obvodu zapojeny v sérii, v daném okamžiku jimi prochází stejný proud, který vyjádříme ze vztahů [7-9]:

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_C}{C} = \frac{U_L}{L}. \quad (23)$$

Snadno dostaneme:

$$X_L = \frac{RU_L}{U_R} \quad (24)$$

a

$$X_C = \frac{RU_C}{U_R}. \quad (25)$$

### **RC článek**

RC články jsou hojně využívány v elektronických obvodech. Obsahují do série zapojené rezistory a kondenzátory. Výstupní signál se odebírá buď z rezistoru nebo z kondenzátoru podle toho, jestli chcete využít dolní nebo horní propust (RC článek jako frekvenční filtr):

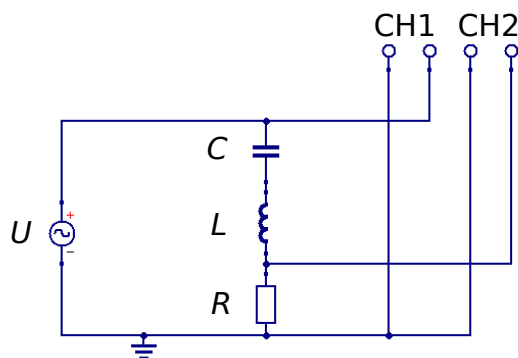
- Horní propust propouští na výstup pouze vysoké frekvence a zeslabuje nízké frekvence.
- Dolní propust propouští na výstup pouze vysoké frekvence a zeslabuje nízké frekvence.

Jestliže nastavujete na zvukové aparatuře výšky (treble) nebo hloubky (bass), používáte propusti.

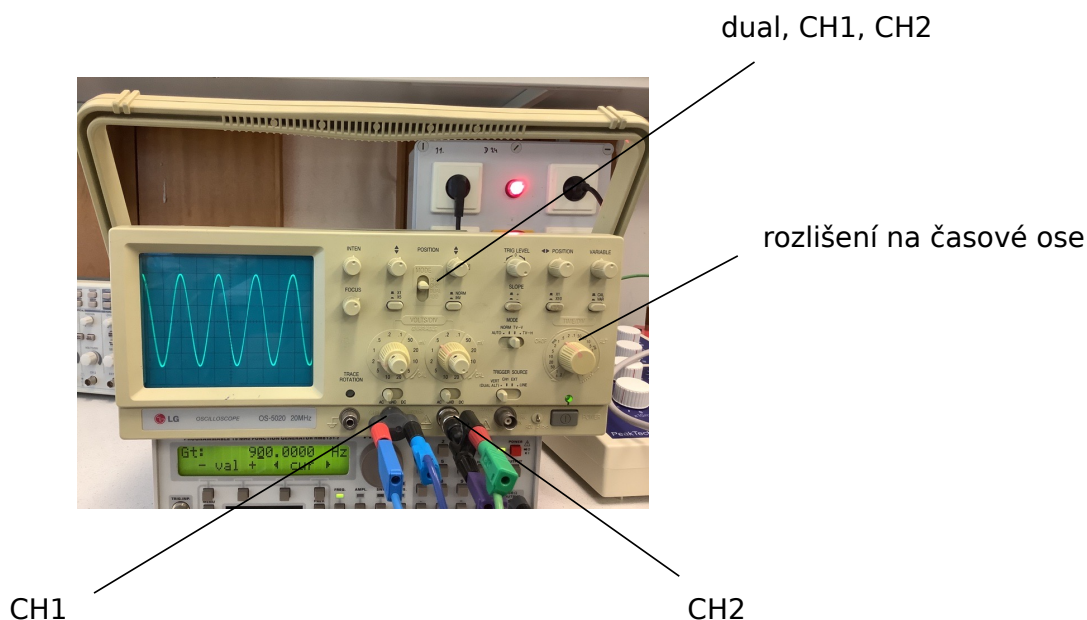
### **Pokyny k vlastnímu měření**

*Měření rezonanční frekvence a studium závislosti napětí na rezistoru na frekvenci*

1. Zapojte obvod podle schématu (obr. 3) tak, aby napětí  $U$  bylo dodáváno zdrojem střídavého napětí (funkčním generátorem) a současně aby toto napětí bylo měřeno pomocí kanálu 1. Napětí na rezistoru bude měřeno pomocí kanálu 2 (obr. 4). Funkční generátor nastavte tak, aby dodával napětí s harmonickým průběhem.



Obr. 3 Schéma zapojení sériového obvodu pro měření napětí  $U_R$  na kanálu 2 (CH2).

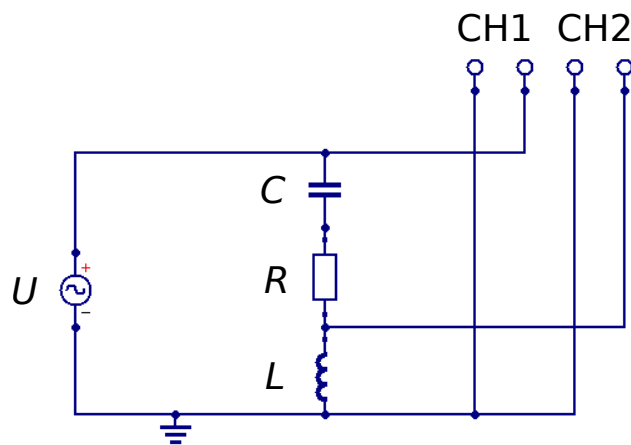


Obr. 4 Nastavení osciloskopu pro měření napětí. Na kanálu 1 (CH1) je měřeno celkové napětí  $U$ , jehož amplitudu odečítáte na svislé ose. Na ose vodorovné je čas.

2. Na odporové dekádě nastavte hodnotu odporu  $10\text{ k}\Omega$ , amplitudu napětí dodávaného funkčním generátorem zvolte  $10\text{ V}$  a jeho frekvenci  $600\text{ Hz}$ . Na kapacitní dekádě nastavte  $0,1\text{ }\mu\text{F}$ , na indukční dekádě  $0,32\text{ H}$ .
3. Měňte frekvenci tak, abyste na obrazovce osciloskopu našli maximální hodnotu amplitudy napětí na rezistoru  $U_R$ . Pak nastavená frekvence je rezonanční frekvencí  $f_r$  RLC obvodu.
4. Napětí  $U_R$  měřte pro frekvence  $f_r \pm 100\text{ Hz}$ ,  $f_r \pm 300\text{ Hz}$ ,  $f_r \pm 500\text{ Hz}$ .
5. Na odporové dekádě nastavte hodnotu odporu  $1\text{ k}\Omega$  a ostatní parametry obvodu ponechte na původních hodnotách. Rezananční frekvence se změnou odporu nemění (viz [21]). Napětí  $U_R$  měřte opět pro frekvence  $f_r \pm 100\text{ Hz}$ ,  $f_r \pm 300\text{ Hz}$ ,  $f_r \pm 500\text{ Hz}$ .
6. Do jednoho obrázku nakreslete závislost podílu  $U_R/U$  na frekvenci užitím měření získaných hodnot. Výsledek porovnejte pomocí vhodného software s teoretickým průběhem podle vzorce [22].

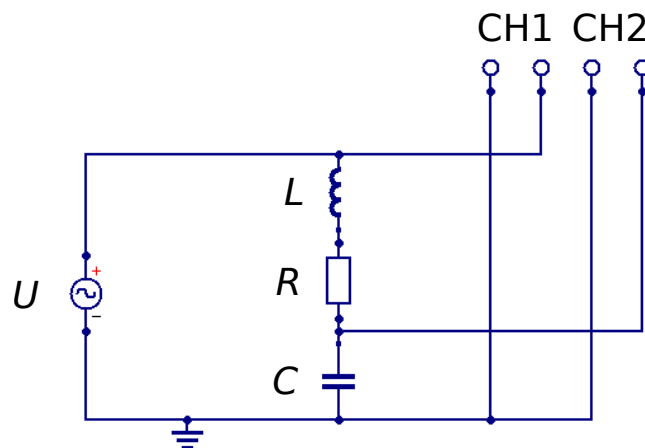
## Měření indukance a kapacitance

1. Na odporové dekádě nastavte opět hodnotu odporu  $10\text{ k}\Omega$ . V obvodu na obr. 3 přehod'te pořadí zapojení indukční a odporové dekády (obr. 5). Na kanálu 2 měřte napětí  $U_L$  na indukční dekádě.



Obr. 5 Schéma zapojení sériového obvodu pro měření napětí  $U_L$  na kanálu 2 (CH2).

2. V obvodu na obr. 5 přehod'te pořadí zapojení indukční a kapacitní dekády (obr. 6). Na kanálu 2 měřte napětí  $U_C$  na kapacitní dekádě.



Obr. 6 Schéma zapojení sériového obvodu pro měření napětí  $U_C$  na kanálu 2 (CH2).

3. Stanovte indukanci a reaktanci pomocí naměřených napětí  $U_R$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  [24-25] a ze vztahů [4] a [5]. Jejich hodnoty porovnejte prostřednictvím relativní odchylky.

4. Z naměřených hodnot napětí  $U_R$ ,  $U_L$  a  $U_C$  určete fázový posuv mezi napětím  $U$  a  $U_R$ . Tento fázový posuv určete také z obrazovky osciloskopu, bude-li zvolen režim duálního zobrazení (obr. 2: **dual**).