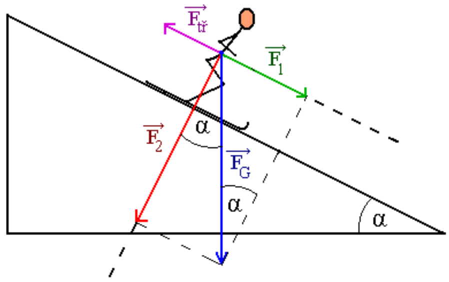
Úloha 1: Vzhůru dolů!

Zima ještě nekončí, právě nyní máte skvělou příležitost užít si současně skvělé lyžování i jarní sluníčko. Zamýšleli jste se ale někdy při lyžování i nad fyzikálními zákonitostmi svého pohybu? Není to vůbec jednoduché, protože lyžaře nelze s dobrou přesností aproximovat tuhým tělesem a už vůbec ne hmotným bodem. Uvažme proto jen nejjednodušší případ lyžaře jedoucího po svahu přímo dolů.

Pohyb po nakloněné rovině

Budeme-li uvažovat libovolné těleso (např. lyžaře) na nakloněné rovině s úhlem náklonu α, bude se pohybovat smykovým pohybem vlivem vlastní tíhové síly $\overrightarrow{F_G}$, která je orientovaná svisle dolů. Nejprve nezohledňujme odpor prostředí. Tíhovou sílu jako vektor rozložíme do dvou navzájem kolmých složek. Jedna složka, $\overrightarrow{F_1}$, je orientovaná ve směru pohybu, druhá, $\overrightarrow{F_2}$, je kolmá ke směru pohybu, tzn., že je kolmá k nakloněné rovině. Jejich velikosti určíme z pravoúhlého trojúhelníku s využitím funkcí sinus a kosinus takto:



$$F_1 = F_G \sin\alpha = m\,g \sin\alpha\,, \qquad F_2 = F_G \cos\alpha = m\,g\,\cos\alpha\,.$$

Složka $\overrightarrow{F_2}$ ovlivňuje velikost třecí síly, která je kolmá k rovině pohybu: $F_{tř} = f.F_2$, kde f je dynamický součinitel smykového tření – předpokládáme totiž lyžaře již v pohybu (pro lyžaře stojícího na svahu v klidu bychom museli uvažovat o něco větší součinitel statického tření).

Síly $\overrightarrow{F_1}$ a $\overrightarrow{F_{tř}}$. jsou opačně orientované, jejich výslednice je rovna jejich rozdílu

$$F = F_1 - F_{tř} = mg\sin\alpha - f\,mg\cos\alpha\,.$$

Mohou nastat tyto případy:

$F_{tř} > F_1$, lyžař zpomaluje,

$F_{tř} = F_1$, lyžař se pohybuje rovnoměrně,

$F_{tř} < F_1$, lyžař zrychluje.

Pohyb v odporujícím prostředí

Při pohybu tělesa ve viskózní tekutině (jakou je i vzduch) bude těleso brzděno vlivem odporové síly F_{odp}. Vzniká silovým působením tekutiny obtékající těleso. Při nízkých rychlostech je odporová síla zhruba úměrná velikosti rychlosti pohybu. Při vyšších rychlostech obvykle lze odporovou sílu lépe přiblížit jako úměrnou druhé mocnině rychlosti (vzpomeňte si na úlohu se střelou z prvního kola).

K rozlišení laminárního a turbulentního proudění a tudíž i toho, který ze vztahů pro odporovou sílu je vhodné použít, slouží tzv. Reynoldsovo číslo. Hodnotu Reynoldsova čísla vypočítáme ze vztahu

$$Re = \frac{\rho \cdot l \cdot v}{\eta},$$

kde l označuje charakteristický rozměr, v je střední hodnota rychlosti proudění kapaliny v daném průřezu a η je dynamická viskozita.

1. Pokud můžeme proudění kolem tělesa koule považovat za ***laminární***, tzn. při nevelkých rychlostech a malých Reynoldsových číslech, platí pro odporovou sílu **Stokesův vztah**

$$F_{\mathrm{odp}} = K \cdot \eta \cdot l \cdot v,$$

kde K je konstanta úměrnosti, η je dynamická viskozita, l je charakteristický rozměr tělesa a v je rychlost pohybu. Konkrétně pro kouli $F_{\mathrm{odp}} = 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v$, kde r označuje její poloměr.

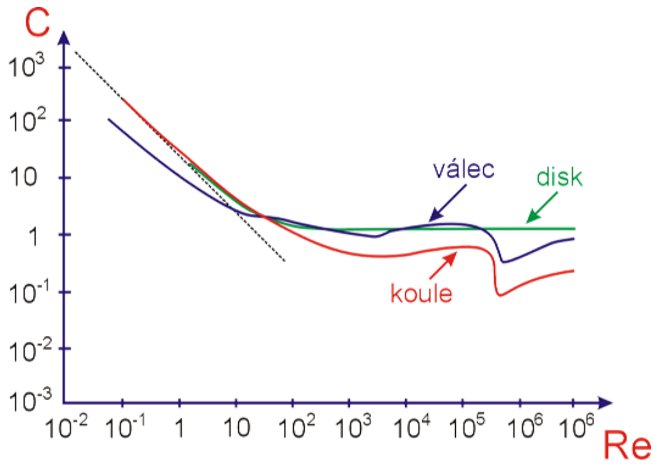
2. Při ***turbulentním*** proudění a velkých Reynoldsových číslech je používán **Newtonův zákon odporu** prostředí ve tvaru

$$F_{odp} = C \cdot \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot S \cdot v^2$$

Typické součinitele odporu C, které zohledňují tvar tělesa, naleznete v tabulce.

Těleso	Součinitel
Aerodynamický tvar	0,037
Koule	0,33
Vypuklá polokoule	0,5
Lyžař	0,55
Deska	1,2
Dutá polokoule	1,3

Pokud bychom chtěli odporovou sílu popsat v širší oblasti rychlostí, můžeme parametr C chápat nikoli jako konstantu, ale jako funkci $C = f(Re)$. Pro tělesa význačných tvarů (např. pro obtékanou kouli nebo válec) se její průběh stanoví experimentálně.



Na obrázku je graf závislosti $C = f(Re)$ pro obtékaný válec, kouli a disk.

1. Počáteční pokles funkcí v oblasti $Re < 1$ odpovídá oboru, kde platí Stokesův zákon (tečna křivky odpovídající zákonu přesně je vyznačena čárkovaně).
2. Pozvolnější pokles až do hodnoty $Re \sim 10^3$ představuje přechodovou oblast mezi platností Stokesova zákona a Newtonova zákona.
3. V oblasti pro $Re = (10^3 - 10^5)$, je hodnota součinitele odporu C přibližně konstantní. V této oblasti používáme Newtonův zákon.

4. Pro Re nad 10^5 nastane v úzké oblasti prudký pokles odporu, při kterém součinitel odporu klesne 4 až 5krát. Tento pokles se někdy označuje jako krize odporu a souvisí se změněným způsobem obtékání tělesa. (Pro disk pohybující ve směru své roviny pokles nenastává.)

Ve sportu tuto prudkou změnu odporu lze vyžít např. při smečování ve volejbale. Prudce vypálený míč přeletí síť téměř vodorovně. Je to proto, že jeho součinitel odporu se pohybuje v nadkritické oblasti a je tedy malý. Za sítí hodnota Reynoldsova čísla poklesne pod kritickou hodnotu, odpor tedy prudce vzroste a míč začne klesat k zemi.

Obtéká-li reálná tekutina laminárně nějaké těleso, je na povrchu tělesa vzájemná rychlost proudění a tělesa nulová, tekutina na tělese lpí. V úzké **mezní vrstvě** dojde k vyrovnání vzájemné rychlosti od nulové hodnoty k hodnotě typické pro hlavní proud obtékající tekutiny. Mezní vrstva obvykle od náběhové části obtékaného tělesa směrem k jeho odvrácené straně se rozšiřuje, **laminární mezní vrstva** bezprostředně obepínající těleso přechází ve větších vzdálenostech od tělesa v **turbulentní mezní vrstvu** a posléze se mezní vrstva od tělesa odtrhne a za tělesem nastane oblast turbulentního proudění nazývaná **úplav**.

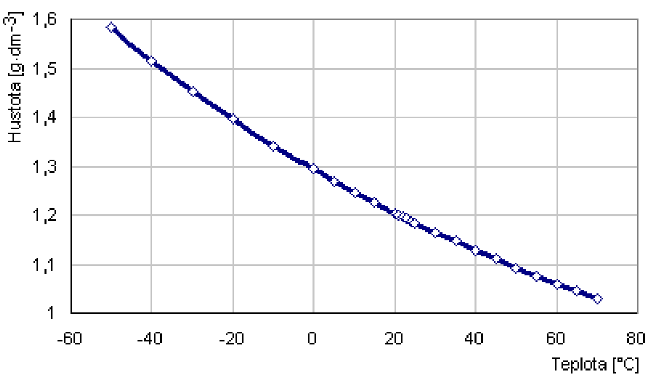
Úkol: *Lyžař sjel po svahu délky 25 m se sklonem 20° na vodorovnou louku a zastavil se ve vzdálenosti 32 m od úpatí svahu. Součinitel smykového tření f byl po celou dobu konstantní. Velikost plochy lyžaře kolmé na směr pohybu uvažujte 0,8 m^2. Za charakteristický rozměr považujte šířku trupu lyžaře 50 cm. Teplotu uvažujte kolem 0 °C.*

Určete:

1. *Velikost součinitele smykového tření za předpokladu, že neuvažujeme odpor vzduchu.*
2. *Vypočtěte maximální dosaženou rychlost lyžaře (na konci svahu) za předpokladu, že neuvažujeme odpor vzduchu.*
3. *Pro tuto hypotetickou maximální rychlost rozhodněte, zda bude proudění vzduchu při obtékání lyžaře laminární nebo turbulentní.*
4. *Pro tutéž rychlost porovnejte hodnotu sil F_1, $F_{\text{tř}}$ a $F_{\text{odp.}}$, jaké působí na lyžaře na konci svahu, a zvažte, zda je zanedbání odporové síly v bodech 1 a 2 ještě přijatelné.*

Můžete využít informací z následujících tabulek a grafů.

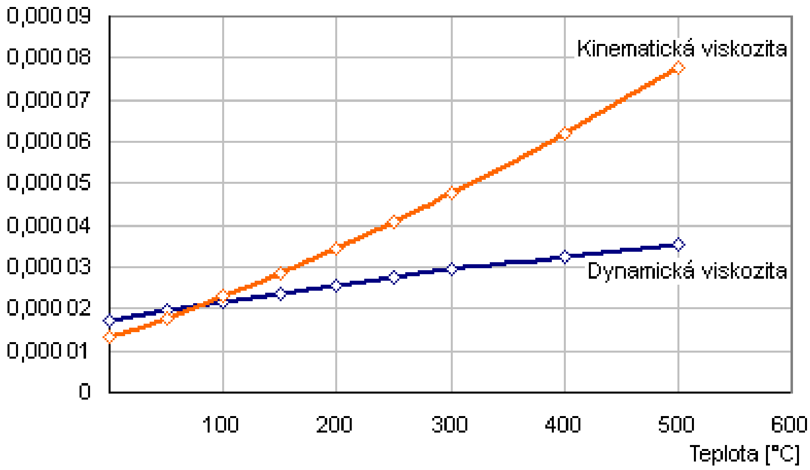
Teplota [°C]	**Hustota [kg.m^{-3}]**
-20	1,395 1
-10	1,342 0
0	1,295 9
5	1,269 7
10	1,247 2
15	1,225 6
20	1,204 7



Tabulka a graf: Závislost hustoty suchého vzduchu na teplotě

Teplota [°C]	Dynamická viskozita [Pa.s]	Kinematická viskozita [$m^2.s^{-1}$]
0	$1,71.10^{-5}$	$1,33.10^{-5}$
50	$1,95.10^{-5}$	$1,79.10^{-5}$
100	$2,17.10^{-5}$	$2,30.10^{-5}$
150	$2,38.10^{-5}$	$2,85.10^{-5}$
200	$2,57.10^{-5}$	$3,45.10^{-5}$

Tabulka a graf: Závislost viskozity vzduchu na teplotě (při normálním tlaku)



Literatura:

http://www.airspace.cz/akademie/rocnik/2008/03/podobnost.php

http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/4_6

http://www.converter.cz/tabulky/vzduch.htm

Úlohu pro vás připravila: Eva Janurová, Institut fyziky VŠB-TU Ostrava